cours

1 Expressions littérales

OBJECTIF 1

DÉFINITION Une **expression littérale** est un calcul contenant une ou plusieurs lettres qui désignent des nombres.

Une expression littérale peut servir à décrire une méthode de calcul. On en utilise, par exemple, pour calculer des aires et des volumes, convertir des unités de température, calculer des vitesses…

Exemples

- Aire d'un disque : $\pi \times r \times r$.
  Dans ce calcul, la lettre r représente le rayon du disque. La lettre π représente un nombre qui ne change pas et qui vaut environ 3,14.
- Volume d'un cube : $c \times c \times c$.
  Dans ce calcul, la lettre c représente la longueur du côté du cube.

Conventions d'écriture

- Il est possible de ne pas écrire le signe × devant une lettre ou une parenthèse.

Remarque
$x \times 4$ ne s'écrit pas $x4$ mais plutôt $4x$.

- $x \times x$ s'écrit x^2 et se lit « x au carré ».
- $x \times x \times x$ s'écrit x^3 et se lit « x au cube ».

Exemples

- La formule donnant l'aire d'un disque $\pi \times r \times r$ peut donc s'écrire πr^2.
- La formule donnant le volume d'un cube $c \times c \times c$ peut donc s'écrire c^3.

2 Calculer la valeur d'une expression littérale

OBJECTIF 2

DÉFINITION **Calculer la valeur** d'une expression littérale, c'est attribuer un nombre à chaque lettre afin d'effectuer le calcul.

Exemple

- Calculer $5x^2 + 3(x - 1) + 4y^3$ lorsque $x = 4$ et $y = 10$.

$5 \times x \times x + 3 \times (x - 1) + 4 \times y \times y \times y$ ← On écrit les signes × sous-entendus.

$= 5 \times 4 \times 4 + 3 \times (4 - 1) + 4 \times 10 \times 10 \times 10$ ← On remplace les « x » par 4 et les « y » par 10.

$= 80 + 3 \times 3 + 4\ 000$ ← On effectue les calculs en respectant les priorités opératoires.

$= 4\ 089$.

Remarques

- Si une même lettre est présente plusieurs fois dans l'expression littérale, alors elle désigne toujours le même nombre.
- Lorsque l'on multiplie deux nombres, le signe × doit être écrit. Il est donc nécessaire d'écrire tous les signes × qui seraient sous-entendus dans l'expression littérale quand on veut la calculer.

3 Tester une égalité

OBJECTIF 3

DÉFINITION Une **égalité** est constituée de deux membres séparés par le signe =.

PROPRIÉTÉ Une égalité est vraie si les deux membres représentent le même nombre, sinon elle est fausse.

Exemples

- $4 \times 10 = 100 - 60$ est une **égalité vraie** car $4 \times 10 = 40$ et $100 - 60 = 40$.
- $4 \times 10 = 40 + 3$ est une **égalité fausse** car $4 \times 10 = 40$ et $40 + 3 = 43$.

DÉFINITION Deux **expressions littérales** sont **égales** si elles sont toujours égales, c'est-à-dire si elles sont égales quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres.

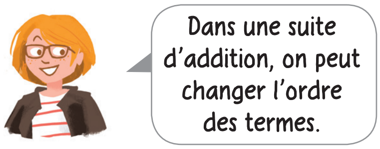
Exemple

- On veut tester l'égalité $2 + 4x + 3 = 1{,}5 \times x \times 2 + x + 5$.

  Pour cela, on transforme chacun de ses membres.

Membre de gauche

$2 + 4x + 3 = 2 + 3 + 4x = 5 + 4x$



Donc $2 + 4x + 3 = 4x + 5$.

Membre de droite

$1{,}5 \times x \times 2 + 5 + x = 1{,}5 \times 2 \times x + 5 + x = 3x + x + 5$

$3x + x = (x + x + x) + x = 4x$ donc

$1{,}5 \times x \times 2 + 5 + x = 4x + 5$.

Les expressions des membres de gauche et de droite sont toujours égales, donc l'égalité $2 + 4x + 3 = 1{,}5 \times x \times 2 + x + 5$ est toujours vraie.

PROPRIÉTÉ Il suffit de trouver un seul exemple pour lequel deux expressions littérales donnent des résultats différents pour prouver que ces expressions littérales ne sont pas égales.

Exemple

- $2 + 3 \times x = 5 \times x$ est une égalité qui est fausse.
  L'égalité est fausse lorsque $x = 4$, on a alors $2 + 3 \times 4 = 14$ et $5 \times 4 = 20$.
  Comme l'égalité n'est pas toujours vraie, $2 + 3 \times x$ n'est pas égal à $5 \times x$.

Remarque

Cela ne veut pas dire que les deux expressions ne sont jamais égales.
En effet, si $x = 1$, on a $2 + 3 \times x = 2 + 3 \times 1 = 5$ et $5 \times 1 = 5$.

4 Expressions littérales

OBJECTIF 4

DÉFINITION **Calculer la valeur d'une expression littérale**, c'est attribuer un nombre à chaque lettre de l'expression afin d'effectuer le calcul.

Exemple

- Calculer $A = -x^2 + 3(x + 6) + 4y$ lorsque $x = -4$ et $y = -8$.

$A = -x^2 + 3 \times (x + 6) + 4 \times y$

On écrit les signes × sous-entendus.

$A = -(-4)^2 + 3 \times ((-4) + 6) + 4 \times (-8)$

On remplace x par -4 et y par -8 en ajoutant si besoin des parenthèses.

$A = -42$

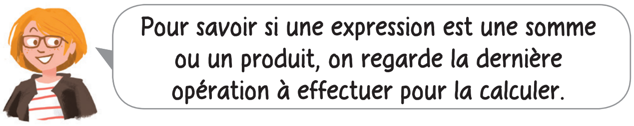
On effectue les calculs en respectant les priorités.

5 Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la soustraction

OBJECTIF 5

PROPRIÉTÉ La multiplication est distributive par rapport à l'addition et la soustraction, ce qui signifie que, quels que soient les nombres k, a et b, on a :

$$\underbrace{k \times (a + b)}_{\text{Produit de deux facteurs dont l'un est une somme.}} = \underbrace{k \times a + k \times b}_{\text{Somme de deux termes. Chaque terme est un produit et chaque produit a un facteur commun.}} \quad \text{ou encore} \quad k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$



DÉFINITION **Développer** une expression littérale, c'est transformer un produit en somme ou différence.

Exemples

- $A = 7 \times (x + 1)$ ← **Produit** de 7 et de $(x + 1)$ qui est une somme

  $A = 7 \times x + 7 \times 1$ ← Expression obtenue en utilisant la distributivité

  $A = 7x + 7$ ← **Somme** de $7x$ et de 7

- $B = (8x - 4) \times 2x$ ← **Produit** de $(8x - 4)$ et de $2x$

  $B = 8x \times 2x + (-4) \times 2x$ ← Expression obtenue en utilisant la distributivité

  $B = 16x^2 - 8x$ ← Somme de $16x^2$ et de $(-8x)$

DÉFINITION **Factoriser** une expression littérale, c'est transformer une somme ou une différence en produit.

Exemple

- $A = 4{,}2 \times x - 1{,}3 \times x$ ← **Différence** de deux produits $4{,}2 \times x$ et $1{,}3 \times x$ ayant x comme facteur commun

$A = x \times (4{,}2 - 1{,}3)$ ← Expression obtenue en utilisant la distributivité

$A = x \times 2{,}9$ ← **Produit** de 2,9 et de x

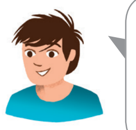
$A = 2{,}9x$

DÉFINITION **Réduire** une expression littérale, c'est l'écrire sous la forme d'une somme algébrique ayant le moins de termes possible.

Pour cela :

1. on effectue toutes les multiplications qu'il est possible de faire ;

2. on regroupe les termes semblables en factorisant.



Les **termes semblables** sont ceux qui ont la même partie littérale :
$2x^2$ et $7x^2$ sont des termes semblables, en revanche, $2x^2$ et $7x$ ne le sont pas.

Exemples

- Réduire $A = 5x^2 + 4 + 2x - 3x^2 - 9 + 11x$.

$A = 5 \times x^2 - 3 \times x^2 + 11 \times x + 2 \times x + 4 - 9$

$A = (5 - 3) \times x^2 + (11 + 2) \times x + 4 - 9$

$A = 2x^2 + 13x - 5$

Remarque

On ne peut pas réduire $2x^2 + 13x$ car la factorisation par x ne permet pas de faire de nouveaux calculs.
En effet : $2x^2 + 13x = 2 \times x \times x + 13 \times x = x \times (2x + 13)$ et on ne peut pas réduire $2x + 13$.

- Réduire $B = 3 + 2x \times 7 - 4x$.

$B = 3 + 2 \times 7 \times x - 4 \times x$

$B = 3 + 14x - 4x$

$B = 3 + 10x$

Remarque

On ne peut pas réduire $3 + 10x$ car :
– on ne peut pas factoriser par x ;
– on doit effectuer les multiplications avant les additions.

6 Égalité de deux expressions littérales

OBJECTIF 6

PROPRIÉTÉ Deux expressions littérales sont égales si elles sont toujours égales, c'est-à-dire si elles sont égales quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres.

Remarque

Pour prouver que deux expressions sont égales, on peut les développer et les réduire.

Exemple

- Prouver que $4x - (5x - 6) = 14 - 2 \times (4 - x) - 3x$.

$4x - (5x - 6) = 4x - 1 \times (5x - 6)$
$= 4x - 1 \times 5x - 1 \times (-6)$
$= 4x - 5x + 6$
$= -x + 6$

$14 - 2 \times (4 - x) - 3x = 14 - 2 \times 4 - 2 \times (-x) - 3x$
$= 14 - 8 + 2x - 3x$
$= -x + 6$

Donc les deux expressions sont égales.

PROPRIÉTÉ Il suffit de trouver un seul exemple pour lequel deux expressions donnent des résultats différents pour prouver que ces expressions ne sont pas égales.

Exemple

- Prouver que $4 + 3x \neq 7x$.

Pour $x = 5$: $4 + 3 \times 5 = 19$ et $7 \times 5 = 35$. C'est un contre-exemple, donc $4 + 3x \neq 7x$.

7 Mettre un problème en équation

OBJECTIF 7

A Équations

DÉFINITION Une **équation** est une égalité comportant un ou plusieurs nombres inconnus désignés par des lettres (que l'on nomme les **inconnues** de l'équation).

Exemple

- $\underbrace{3 \times x + 5}_{\text{Membre de gauche}} = \underbrace{6 \times x - 1}_{\text{Membre de droite}}$ est une équation d'inconnue x.

DÉFINITION Dans une équation, les valeurs des inconnues pour lesquelles l'égalité est vraie sont les **solutions** de l'équation.

Exemple

- On considère l'équation $3 \times x + 5 = 6 \times x - 1$ d'inconnue x.
  2 est une solution de cette équation, car si $x = 2$:
  $3 \times 2 + 5 = 11$ et $6 \times 2 - 1 = 11$ donc l'égalité est vraie pour $x = 2$.
  En revanche, 7 n'est pas une solution de cette équation, car si $x = 7$:
  $3 \times 7 + 5 = 26$ et $6 \times 7 - 1 = 41$ donc l'égalité est fausse pour $x = 7$.

B Mettre un problème en équation

Pour mettre un problème en équation, on repère dans un premier temps l'inconnue et on la nomme par une lettre.
On écrit ensuite une égalité entre deux quantités faisant intervenir cette inconnue.

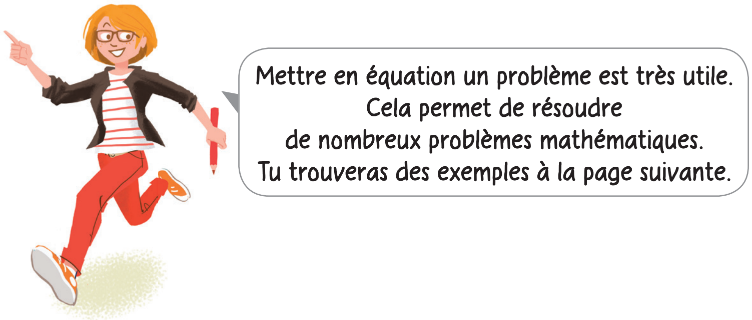
Exemple

- Voici un problème :
  Je suis un nombre dont le double augmenté de 5 est égal au triple diminué de 4.
  Qui suis-je ?
  On appelle x le nombre cherché.

On écrit le **double** de ce nombre.	$2x$
On **augmente de 5** ce résultat.	$2x + 5$

On écrit le **triple** de ce nombre.	$3x$
On **diminue de 4** ce résultat.	$3x - 4$

Ces deux expressions doivent être égales ; on cherche donc un nombre qui soit solution de l'équation $2x + 5 = 3x - 4$.
On peut remarquer que 9 est une solution de cette équation et donc du problème posé, car : $2 \times 9 + 5 = 23$ et $3 \times 9 - 4 = 23$.



8 Résoudre un problème

OBJECTIF 8

On peut résoudre un problème à l'aide d'équations. Pour cela, il faut :
- choisir une inconnue et la nommer avec une lettre,
- mettre le problème en équation,
- trouver une solution de l'équation,
- répondre en interprétant la solution de l'équation en fonction du problème initial.

Exemple 1

- Emma doit acheter des melons avec le billet que lui a donné sa mère.

Si elle achète 5 melons, il lui restera 1 € mais il lui manque 80 centimes pour acheter 6 melons.
Combien coute un melon ?

1. On nomme l'inconnue avec une lettre.
Soit x le prix d'un melon.

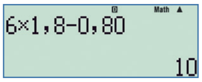
2. On met le problème en équation.

5 melons coutent $5 \times x$.
Donc $5 \times x + 1$ représente la valeur du billet.

6 melons coutent $6 \times x$.
Donc $6 \times x - 0{,}80$ représente la valeur du billet.

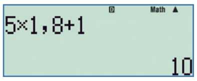
On a donc l'équation :
$6 \times x - 0{,}80 = 5 \times x + 1$

3. On trouve une solution de l'équation.



```
6×1,8-0,80
                10
```

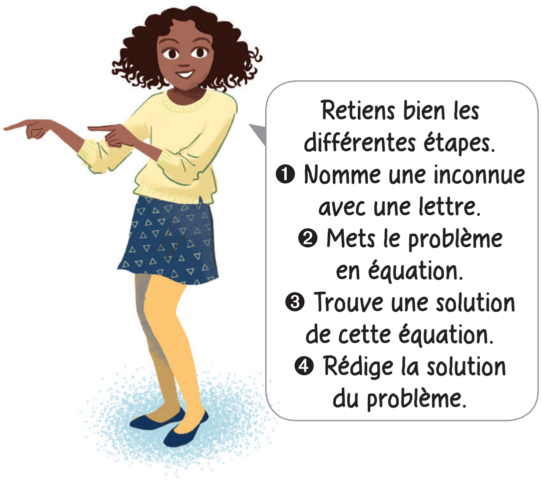
et



```
5×1,8+1
                10
```

Donc 1,8 est une solution de cette équation.

4. On interprète la solution pour le problème.
Un melon coute donc 1,80 €.



Exemple 2

- Jade, Akim et Ilan collectionnent les canettes de soda. Ils en parlent à un quatrième ami.

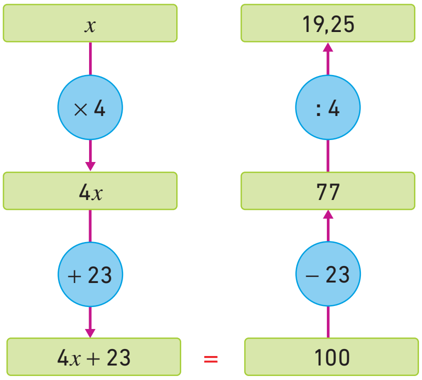
Akim dit : « J'ai deux fois plus de canettes que Jade. »
Ilan dit : « J'ai 23 canettes de plus que Jade. »
Jade dit : « À nous trois, nous avons exactement 100 canettes. »
Indiquer, si possible, combien chaque enfant possède de cannettes.

1. On nomme l'inconnue avec une lettre.
Soit x le nombre de canettes de Jade.

2. On met le problème en équation.
Jade a x canettes.
Akim a $2 \times x$ canettes.
Ilan a $x + 23$ canettes.

On a donc l'équation :
$x + 2 \times x + x + 23 = 100$
Ou encore : $4x + 23 = 100$

3. On trouve une solution de l'équation.



4. On interprète la solution pour le problème.
19,25 ne peut pas correspondre à un nombre de canettes. Bien que l'équation ait une solution, le problème n'a en revanche pas de solution.
Au moins un des enfants a dû se tromper dans son affirmation.

9 Expressions littérales

OBJECTIF 9

DÉFINITION Calculer la valeur d'une expression littérale, c'est attribuer un nombre à chaque lettre de l'expression afin d'effectuer le calcul.

Exemple

- Calculer $A = 2x^3 - y^2 + 8(x - 1)$ lorsque $x = -2$ et $y = -5$.

$A = 2 \times x^3 - y^2 + 8 \times (x - 1)$ ← On écrit les signes × sous-entendus.

$A = 2 \times (-2)^3 - (-5)^2 + (-2 - 1)$ ← On remplace x par -2 et y par -5 en mettant des parenthèses.

$A = -16 - 25 - 24$ ← On effectue les calculs en respectant les priorités.

$A = -65$

Remarque

On peut aussi écrire les multiplications sous-entendues dans x^3 en l'écrivant $x \times x \times x$, et dans y^2 en l'écrivant $y \times y$.

10 Double distributivité et identités remarquables

OBJECTIF 10

PROPRIÉTÉ Quels que soient les nombres a, b, c et d, on a :

$$\underbrace{(a + b) \times (c + d)}_{\text{Produit de deux facteurs}} = \underbrace{a \times c + a \times d + b \times c + b \times d}_{\text{Somme de quatre termes}}$$

Remarque

Cette propriété est une conséquence de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la soustraction.
En effet : $(a + b) \times (c + d) = a \times (c + d) + b \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$.

Exemple

- Développer $B = (-3 + 2x) \times (7 - 4x)$.

$B = ((-3) + 2x) \times (7 + (-4x))$ ←

$B = (-3) \times 7 + (-3) \times (-4x) + 2x \times 7 + 2x\,(-4x)$ ←

Pour éviter les erreurs, il est conseillé d'effectuer mentalement ces étapes.

$B = -21 + 12x + 14x - 8x^2$

$B = -8x^2 + 26x - 21$

PROPRIÉTÉS Quels que soient les nombres a et b, on a :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ces égalités s'appellent les **identités remarquables**.

Remarque

Ces propriétés servent à développer plus rapidement certaines expressions, mais elles servent surtout à factoriser des expressions.

11 Utiliser le calcul littéral pour démontrer une propriété

OBJECTIF 11

DÉFINITION Deux expressions littérales sont égales si elles sont toujours égales, c'est-à-dire si elles sont égales pour n'importe quelles valeurs attribuées aux lettres de l'expression.

PROPRIÉTÉ On peut utiliser une expression littérale pour écrire certaines propriétés des nombres entiers.

Exemples

- Un nombre n étant choisi :
  - $n + 1$ représente le nombre suivant ;
  - $n - 1$ représente le nombre précédent.
- Un nombre pair s'écrit toujours sous la forme $2n$.
- Un nombre impair s'écrit toujours sous la forme $2n + 1$ ou $2n - 1$.
- Un multiple de 3 s'écrit $3n$ et un multiple de 7 s'écrit $7n$.
- Un nombre de trois chiffres peut s'écrire $a \times 100 + b \times 10 + c$.

$$\underset{\overset{\uparrow}{\text{chiffre des centaines}}}{a} \times 100 + \underset{\overset{\uparrow}{\text{chiffre des dizaines}}}{b} \times 10 + \underset{\overset{\uparrow}{\text{chiffre des unités}}}{c}$$

PROPRIÉTÉ Il suffit de trouver un seul exemple pour lequel deux expressions donnent des résultats différents pour prouver que celles-ci ne sont pas égales.

Vocabulaire
Cet exemple s'appelle alors un **contre-exemple**.

Exemples

- Benjamin affirme : « Pour tous les nombres a et b, on a $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. »
  A-t-il raison ?

  Contre-exemple
  Avec $a = 2$ et $b = 3$, on a $(a + b)^2 = (2 + 3)^2 = 25$, alors que $a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$.
  C'est un contre-exemple, l'affirmation de Benjamin est donc fausse.

- Prouver que pour tout nombre x, on a $(2x + 3)(5 - x) + 10 = 47 + x(7 - 2x) - 22$.

Pour prouver que deux expressions sont égales, on peut les développer et les réduire.

– On développe et on réduit le premier membre de l'égalité $(2x + 3)(5 - x) + 10$:

$$\begin{aligned}(2x + 3)(5 - x) + 10 &= 10x - 2x^2 + 15 - 3x + 10\\ &= -2x^2 + 7x + 25\end{aligned}$$

– On développe et on réduit le deuxième membre de l'égalité $47 + x(7 - 2x) - 22$:

$$\begin{aligned}47 + x(7 - 2x) - 22 &= 47 + 7x - 2x^2 - 22\\ &= -2x^2 + 7x + 25\end{aligned}$$

Les deux expressions obtenues sont égales, donc l'égalité :

$$(2x + 3)(5 - x) + 10 = 47 + x(7 - 2x) - 22$$

est vraie pour toutes les valeurs de x.

12 Équations du 1er degré à une inconnue

OBJECTIF 12

PROPRIÉTÉS On ne change pas les solutions d'une équation si :
– on développe, on réduit, on factorise chacun des deux membres de l'équation ;
– on additionne ou on soustrait un même nombre aux deux membres de l'équation ;
– on multiplie ou on divise les deux membres de l'équation par un même nombre non nul.

Exemple

- Résoudre l'équation $6x + 5 = (3 - x) \times 4$.

Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue, on utilise les propriétés précédentes pour isoler l'inconnue dans un membre de l'équation.

$6x + 5 = (3 - x) \times 4$
$6x + 5 = 12 - 4x$ ← On développe et on réduit les deux membres de l'équation.

$6x + 5 + 4x = 12 - 4x + 4x$
$10x + 5 = 12$ ← On ajoute $4x$ aux deux membres de l'équation, puis on réduit chacun de ces membres.

$10x + 5 - 5 = 12 - 5$
$10x = 7$ ← On soustrait 5 aux deux membres de l'équation, puis on réduit chacun de ces membres.

$\frac{10x}{10} = \frac{7}{10}$ ← On divise les deux membres par 10.

$x = 0{,}7$ ← L'équation n'a qu'une seule solution.

Cette équation est du 1er degré parce qu'il n'y a pas de termes en x^2, en x^3, etc.

13 Équations-produit nul

OBJECTIF 13

PROPRIÉTÉ Dire qu'un produit est nul signifie que l'un de ses facteurs est nul.

Remarque
On utilise cette propriété et la distributivité (notamment les identités remarquables) pour résoudre des équations dont le degré est supérieur ou égal à 2.

Une équation est de degré 2 si elle comporte des termes en x^2.

Exemple

- Résoudre $(5x + 1)(3 - 2x) = 0$.

Grâce à la propriété ci-dessus, on peut dire que si $(5x + 1)(3 - 2x) = 0$, alors soit $5x + 1 = 0$, soit $3 - 2x = 0$. Cette équation a donc deux solutions.

• **Première solution**	• **Deuxième solution**
$5x + 1 = 0$	$3 - 2x = 0$
$5x = -1$	$3 = 2x$
$x = -0{,}2$	$1{,}5 = x$

L'équation $(5x + 1)(3 - 2x) = 0$ a deux solutions : $-0{,}2$ et $1{,}5$.

14 Inégalités

OBJECTIF 14

A Notations et définition

- $a < b$ signifie que a est strictement inférieur à b.
- $a \leqslant b$ signifie que a est inférieur ou égal à b.

DÉFINITION Quels que soient les nombres a et b, on dit que $a < b$ si $b - a$ est positif.

B Inégalités et opérations

PROPRIÉTÉ Quels que soient les nombres a, b et c ($c \neq 0$), si $a < b$, alors :

- $a + c < b + c$
- $a - c < b - c$
- si $c > 0$, alors $ac < bc$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- si $c < 0$, alors $ac > bc$ et $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Exemples

- $7 < 15$, donc $7 + 10 < 15 + 10$.
- $7 < 15$, donc $7 - 10 < 15 - 10$.
- $5 \leqslant 6$, donc $5 \times 2 \leqslant 6 \times 2$.
- $6 < 21$, donc $\frac{6}{-3} > \frac{21}{-3}$.

Remarque
L'inégalité change
de sens car $-3 < 0$.

15 Inéquations

OBJECTIF 15

DÉFINITION Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle figurent des nombres inconnus désignés par des lettres. Les solutions d'une inéquation sont les valeurs que l'on peut attribuer aux lettres pour que l'inégalité soit vraie.
Résoudre une inéquation, c'est en trouver toutes les solutions.

PROPRIÉTÉ On ne change pas les solutions d'une inéquation si :
– on développe, on réduit ou on factorise chacun des deux membres de l'inéquation ;
– on additionne ou on soustrait un même nombre aux deux membres de l'inéquation ;
– on multiplie ou on divise les deux membres de l'inéquation par un même nombre positif non nul ;
– on multiplie ou on divise les deux membres de l'inéquation par un même nombre négatif non nul à condition de changer le sens du signe de l'inéquation.

Exemple

- Résoudre l'inéquation $8 \times (x + 2) \geqslant 9 + 10x$.

$8 \times (x + 2) \geqslant 9 + 10x$ $8x + 16 \geqslant 9 + 10x$	← On développe et on réduit les deux membres de l'inéquation.
$8x + 16 - 10x \geqslant 9 + 10x - 10x$ $-2x + 16 \geqslant 9$	← On soustrait $10x$ aux deux membres de l'inéquation, puis on réduit chaque membre.
$-2x + 16 - 16 \geqslant 9 - 16$ $-2x \geqslant -7$	← On soustrait 16 aux deux membres de l'inéquation, puis on réduit chaque membre.
$\frac{-2x}{-2} \leqslant \frac{-7}{-2}$	← On divise les deux membres par -2. Comme c'est un nombre négatif, on change le sens de l'inéquation.

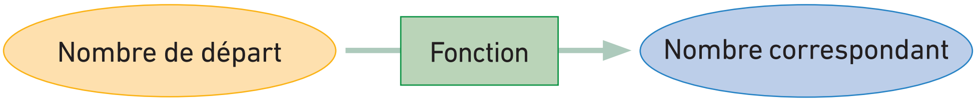
$x \leqslant 3{,}5$

L'inéquation a une infinité de solutions : tous les nombres inférieurs ou égaux à 3,5 sont des solutions.

16 Vers la notion de fonction

OBJECTIF 16

DÉFINITION Le processus qui, à un nombre, fait correspondre un autre nombre unique s'appelle une **fonction**.



A Exemple et notations

Exemple

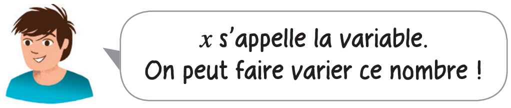
- On définit la fonction, appelée *f*, par le programme de calcul suivant : « Élever au carré le nombre choisi, puis ajouter 1. »

– Au nombre 4 correspond le nombre 17 ; en effet : $4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$.
– Au nombre 6 correspond le nombre 37 ; en effet : $6^2 + 1 = 36 + 1 = 37$.

Les correspondances effectuées par la fonction *f* peuvent être résumées dans un tableau :

Nombre de départ	4	6	7	8
Nombre correspondant	17	37	50	65

De façon générale : par la fonction *f*, à un nombre x, on fait correspondre le nombre $x^2 + 1$.



Notations

On note : $\underbrace{f : x \mapsto x^2 + 1}$ ou $\underbrace{f(x) = x^2 + 1.}$

se lit : « la fonction *f* qui à x fait correspondre $x^2 + 1$ ».

se lit : « *f* de x égal $x^2 + 1$ ».

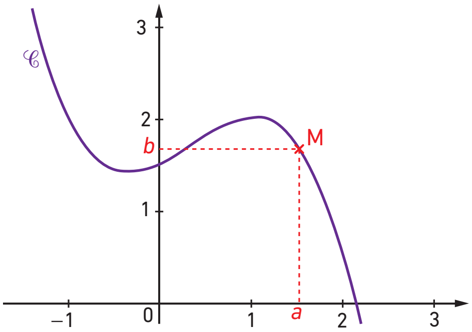
Remarque

Il ne faut pas confondre *f* et $f(x)$.
f est une fonction (un processus de calcul) alors que $f(x)$ est un nombre.

B Représentation graphique

Dans un repère, on considère les points M de coordonnées (a ; b) où *f* est une fonction, a est un nombre et $b = f(a)$.

L'ensemble de tous ces points forme une courbe $\mathscr{C}$ appelée la **représentation graphique** de la fonction *f*.



17 Image d'un nombre par une fonction

OBJECTIF 17

DÉFINITION Par la fonction f, à un nombre $\boldsymbol{a}$ correspond un nombre $\boldsymbol{b}$.
Le nombre $\boldsymbol{b}$ s'appelle l'**image** du nombre $\boldsymbol{a}$ par la fonction f.

Exemples

- Soit la fonction f définie par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

L'image de 2 par la fonction f est 0,5 ; en effet : $f(2) = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

On peut noter $f : 2 \mapsto 0{,}5$.

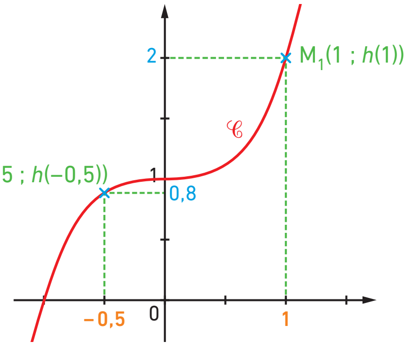
- La fonction g est donnée par le tableau de valeurs suivant :

x	–1	0	1	2
$g(x)$	–3	–5	–3	3

a pour image

– L'image de 0 par la fonction g est –5.
– L'image de 2 par la fonction g est 3.

- On considère la fonction h représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous :



On lit graphiquement que l'image de 1 par la fonction h est 2 et que l'image de –0,5 est 0,8.

18 Antécédent d'un nombre par une fonction

OBJECTIF 18

DÉFINITION Par la fonction f, à un nombre $\boldsymbol{a}$ correspond un nombre $\boldsymbol{b}$.
Le nombre $\boldsymbol{a}$ s'appelle un **antécédent** du nombre $\boldsymbol{b}$ par la fonction f.

Exemples

- Soit la fonction f définie par $f : x \mapsto x^2$.
Un antécédent de 9 par la fonction f est 3.
En effet, $f(3) = 3^2 = 9$.
On peut noter $f : 3 \mapsto 9$.

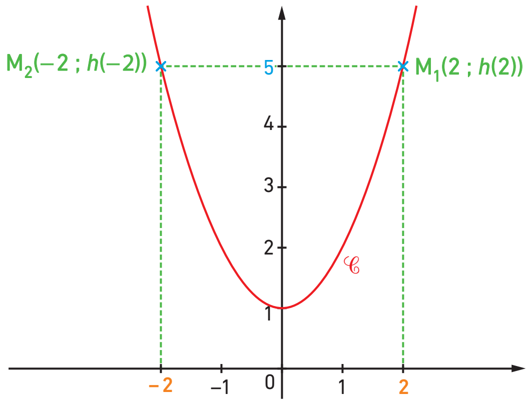
- La fonction g est donnée par le tableau de valeurs suivant :

x	–5	–3	0	5
$g(x)$	4	2	1	2

a pour antécédent

– Un antécédent de 4 par la fonction g est –5.
– Des antécédents de 2 par la fonction g sont –3 et 5.

- On considère la fonction h déterminée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous :



On lit graphiquement que des antécédents de 5 par la fonction h sont –2 et 2.

En effet, $h(-2) = 5$ et $h(2) = 5$.

19 Fonctions linéaires

OBJECTIF 19

A Définition et notation

DÉFINITION Une **fonction linéaire** est une fonction qui, à un nombre x, fait correspondre le nombre $a \times x$, où a est un nombre donné.
On la note $f : x \mapsto ax$ ou $f(x) = ax$.

Exemple

- La fonction qui, à un nombre, associe son double est une fonction linéaire.
  On la note $f : x \mapsto 2x$ ou $f(x) = 2x$.

Lorsque l'on applique une fonction linéaire $f : x \mapsto ax$, cela revient à choisir un nombre, puis à le « multiplier par a ».

B Tableau de valeurs d'une fonction linéaire

PROPRIÉTÉ Un tableau dont les nombres de la deuxième ligne sont les images des nombres de la première ligne par une fonction linéaire est un tableau de proportionnalité.

Exemple

- La fonction $f : x \mapsto 5x$ est une fonction linéaire.
  Un tableau de valeurs associé à la fonction f est un tableau de proportionnalité.

x	-2	0	2	4
$f(x)$	-10	0	10	20

$\times 5$

En effet, les nombres de la deuxième ligne s'obtiennent en multipliant par 5 les nombres de la première ligne.

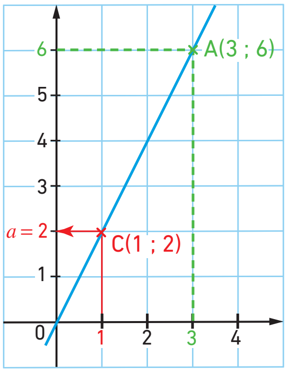
C Représentation graphique

PROPRIÉTÉ Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire $f : x \mapsto ax$ est une droite qui passe par l'origine du repère.

Remarque
a est appelé le **coefficient directeur** de cette droite.
La droite représentative de la fonction f de coefficient directeur a passe par le point de coordonnées $(1 ; a)$.

Exemple

- La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2x$ est la droite passant par l'origine du repère et le point A (3 ; 6).
  En effet, $f(3) = 2 \times 3 = 6$.
  Cette droite passe par le point de coordonnées C (1 ; 2).
  En effet, $f(1) = 2 \times 1 = 2$.



20 Fonctions affines

OBJECTIF 20

A Définition et notation

DÉFINITION Une **fonction affine** est une fonction qui, à un nombre x, fait correspondre le nombre $a \times x + b$, où a et b sont deux nombres donnés.
On la note $f : x \mapsto ax + b$ ou $f(x) = ax + b$.

Exemple

- La fonction qui, à un nombre, associe la somme de son triple et de 4 est une fonction affine. On la note $f : x \mapsto 3x + 4$ ou $f(x) = 3x + 4$.

B Cas particuliers

- Une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une fonction linéaire si $b = 0$.

En effet, dans ce cas $f : x \mapsto ax$.

- Une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une fonction constante si $a = 0$.

En effet, dans ce cas $f : x \mapsto b$.

C Représentation graphique

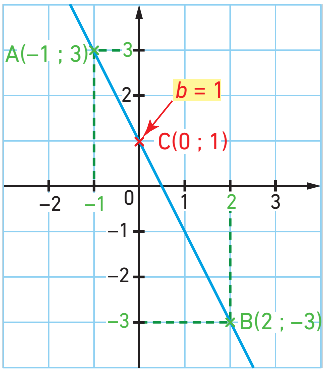
PROPRIÉTÉ Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite.

Remarque

a est appelé le **coefficient directeur** de la droite et b est appelé l'**ordonnée à l'origine**.
La droite représentative d'une fonction d'ordonnée à l'origine b passe par le point de coordonnées $(0 ; b)$.

Exemple

- La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto -2x + 1$ est la droite passant par les points A$(-1 ; 3)$ et B$(2 ; -3)$.
En effet, $f(-1) = -2 \times (-1) + 1 = 3$ et $f(2) = -2 \times 2 + 1 = -3$.
La droite passe aussi par le point de coordonnées **C (0 ; 1)** car $f(0) = -2 \times 0 + 1 = 1$.



21 Accroissements

OBJECTIF 21

PROPRIÉTÉ f est une fonction affine de la forme $f : x \mapsto ax + b$.
Si x_1 et x_2 sont deux nombres tels que $x_1 \neq x_2$, alors :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Remarque

Cette propriété signifie que les accroissements de $f(x)$ et de x sont proportionnels. Le coefficient de proportionnalité est a.
a est aussi le coefficient directeur de la droite représentant f. Le coefficient directeur permet de définir la direction de la droite.

Exemple

- On considère la fonction affine f telle que $f(2) = 4$ et $f(5) = 10$.
Le coefficient directeur de la droite représentative de f est égal à : $\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{10 - 4}{5 - 2} = 2$.