cours

1 Expressions sans parenthèses

OBJECTIF 1

PROPRIÉTÉ Dans une expression sans parenthèses, les multiplications et les divisions doivent être effectuées avant les additions et les soustractions.

On dit que la multiplication et la division sont **prioritaires** sur l'addition et la soustraction.

Exemples

- Calcul de $A = 3 + 4 \times 5$
  $A = 3 + \mathbf{4 \times 5}$ ← On effectue d'abord la **multiplication**
  $A = 3 + \mathbf{20}$
  $A = 23$
- Calcul de $B = 12 - 6 : 2$
  $B = 12 - \mathbf{6 : 2}$ ← On effectue d'abord la **division**
  $B = 12 - \mathbf{3}$
  $B = 9$

PROPRIÉTÉ Dans une expression sans parenthèses qui ne contient que des additions et des soustractions, on effectue les calculs de gauche à droite (on dit aussi « dans le sens de lecture »).

Exemple

- Calcul de $A = 10 - 6 + 3$
  $A = \mathbf{10 - 6} + 3$
  $A = \mathbf{4} + 3 = 7$

PROPRIÉTÉ Dans une expression sans parenthèses qui ne contient que des multiplications et des divisions, on effectue les calculs de gauche à droite (on dit aussi « dans le sens de lecture »).

Exemple

- Calcul de $B = 30 : 5 \times 2$
  $B = \mathbf{30 : 5} \times 2$
  $B = \mathbf{6} \times 2 = 12$

PROPRIÉTÉ Dans une expression sans parenthèses qui ne contient que des additions, on peut effectuer les calculs dans l'ordre que l'on veut.

On dit que l'addition est **commutative**.

Exemple

Il y a trois façons de calculer l'expression $A = 12 + 3 + 8$ qui conduisent toutes au même résultat final.

- Première façon
  $A = \mathbf{12 + 3} + 8$
  $A = \mathbf{15} + 8 = 23$
- Deuxième façon
  $A = 12 + \mathbf{3 + 8}$
  $A = 12 + \mathbf{11} = 23$
- Troisième façon
  $A = \mathbf{12 + 8} + 3$
  $A = \mathbf{20} + 3 = 23$

PROPRIÉTÉ Dans une expression sans parenthèses qui ne contient que des multiplications, on peut effectuer les calculs dans l'ordre que l'on veut.

On dit que la multiplication est **commutative**.

Exemple

Il y a trois façons de calculer l'expression $B = 10 \times 3 \times 8$ qui conduisent toutes au même résultat final.

- Première façon
  $A = \mathbf{10 \times 3} \times 8$
  $A = \mathbf{30} \times 8 = 240$
- Deuxième façon
  $A = 10 \times \mathbf{3 \times 8}$
  $A = 10 \times \mathbf{24} = 240$
- Troisième façon
  $A = \mathbf{10 \times 8} \times 3$
  $A = \mathbf{80} \times 3 = 240$

2 Expressions avec parenthèses

OBJECTIF 2

PROPRIÉTÉ Dans une expression contenant des parenthèses, on effectue en premier les calculs contenus dans les parenthèses.

Exemple

- Calcul de $A = 8 + 3 \times (10 - 2 \times 3)$

$A = 8 + 3 \times (10 - 2 \times 3)$ ← Dans l'expression entre parenthèses, c'est la multiplication qui est prioritaire. On calcule donc 2×3.

$A = 8 + 3 \times (10 - 6)$ ← Pour finir le calcul entre parenthèses, on calcule $10 - 6$.

$A = 8 + 3 \times 4$ ← On termine le calcul de A en respectant les priorités des opérations.

$A = 8 + 12$

$A = 20$

- Calcul de $B = \dfrac{7 + 4 \times 2}{5 + 3} + 10$

$B = (7 + 4 \times 2) : (5 + 3) + 10$ ← Dans une expression contenant des écritures fractionnaires, il faut considérer que le numérateur et le dénominateur sont entre parenthèses.

$B = \dfrac{7 + 8}{8} + 10 = \dfrac{15}{10} + 10$

$B = 1{,}875 + 10 = 11{,}875$

- $\dfrac{\frac{2}{3}}{4} = (2 : 3) : 4$

- $\dfrac{2}{\frac{3}{4}} = 2 : (3 : 4)$

3 Vocabulaire

OBJECTIF 3

DÉFINITIONS

– Le résultat d'une **addition** s'appelle une **somme** et les nombres utilisés s'appellent les **termes**.

– Le résultat d'une **soustraction** s'appelle une **différence** et les nombres utilisés s'appellent les **termes**.

– Le résultat d'une **multiplication** s'appelle un **produit** et les nombres utilisés s'appellent les **facteurs**.

– Le résultat d'une **division** s'appelle un **quotient**.

Exemples

- L'expression $3 + 4 \times 5$ est une somme car la dernière opération effectuée est une addition.
- L'expression $(5 + 2) \times 6$ est un produit car la dernière opération effectuée est un produit.
- $18 + 13 \times 9$ est la somme de 18 et du produit de 13 par 9.
- $\dfrac{8 - 4}{12 \times 3}$ est le quotient de la différence entre 8 et 4 par le produit de 12 et de 3.

Selon la dernière opération effectuée, on dit que cette expression est une somme, un produit, une différence ou un quotient.

4 Quotient et fraction

OBJECTIF 4

DÉFINITION Soit deux nombres n et d (avec $d \neq 0$).
Le **quotient de n par d** est le nombre qui, multiplié par d, donne n.
On peut écrire ce nombre en écriture fractionnaire : $\frac{n}{d}$.

Exemples

- Par quel nombre faut-il multiplier 4 pour obtenir 21 ? $4 \times ... = 21$?

– C'est le quotient $\frac{21}{4}$. En effet, $4 \times \frac{21}{4} = 21$.

– Ce quotient a aussi une écriture décimale : $\frac{21}{4} = 21 : 4 = 5{,}25$.

- Par quel nombre faut-il multiplier 3 pour obtenir 22 ? $3 \times ... = 22$?

– C'est le quotient $\frac{22}{3}$. En effet, $3 \times \frac{22}{3} = 22$.

– En revanche, ce quotient n'a pas d'écriture décimale exacte, car la division de 22 par 3 ne se termine pas : $22 : 3 \approx 7{,}333333...$

DÉFINITION Une **fraction** est une écriture fractionnaire dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers.

Exemple

- Parmi les écritures fractionnaires $\frac{2{,}5}{3}$, $\frac{8}{5{,}2}$, $\frac{7{,}4}{4{,}8}$ et $\frac{8}{7}$, seule $\frac{8}{7}$ est une fraction.

Fractions et proportions

Exemple

- Dans le collège d'Arthur, $\frac{2}{5}$ des élèves sont demi-pensionnaires ; dans celui de Yaëlle, $\frac{1}{3}$ des élèves sont demi-pensionnaires. Dans quel collège y a-t-il le plus d'élèves demi-pensionnaires sachant que les deux collèges ont le même nombre d'élèves ?

Pour comparer des fractions (et donc des proportions), on peut revenir à leur écriture décimale ou les placer sur une droite graduée :

• Collège d'Arthur

• Collège de Yaëlle

$\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$: la proportion d'élèves demi-pensionnaires est plus grande dans le collège d'Arthur.

5 Écritures fractionnaires égales

OBJECTIF 5

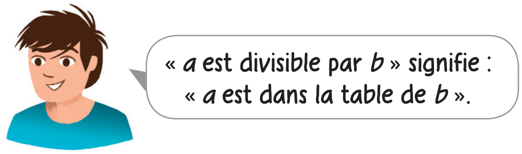
PROPRIÉTÉ Un quotient ne change pas quand on multiplie (ou divise) son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$$

Exemples

- $\frac{3{,}2}{1{,}5} = \frac{3{,}2 \times 10}{1{,}5 \times 10} = \frac{32}{15}$
- $\frac{12}{27} = \frac{12 : 3}{27 : 3} = \frac{4}{9}$, la fraction $\frac{12}{27}$ a été « simplifiée » par 3.

DÉFINITION Un nombre a **est divisible** par un nombre b lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 0.



Il existe des moyens simples pour savoir si un nombre est divisible par un autre sans effectuer la division euclidienne : ce sont les critères de divisibilité.

Critères de divisibilité

Critère de divisibilité par 2 : un nombre est divisible par 2 s'il est pair, ce qui signifie que son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemple

- 51**4** est divisible par 2 alors que 26**7** ne l'est pas.

Critère de divisibilité par 3 : un nombre est divisible par 3 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.

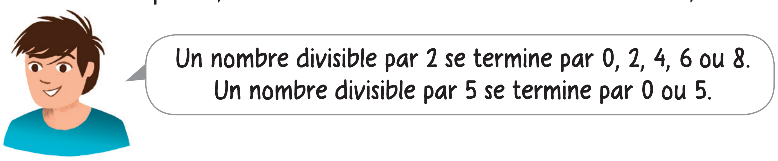
Exemples

- 1 467 est divisible par 3, car $1 + 4 + 6 + 7 = 18$ et 18 est divisible par 3.
- 2 368 n'est pas divisible par 3, car $2 + 3 + 6 + 8 = 19$ et 19 n'est pas divisible par 3.

Critère de divisibilité par 5 : un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.

Exemples

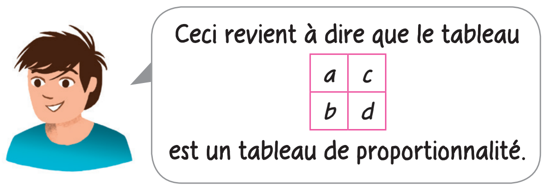
- 2 70**5** est divisible par 5, car le chiffre des unités est 5.
- 14 78**0** est divisible par 5, car le chiffre des unités est 0.
- 25 55**7** n'est pas divisible par 5, car le chiffre des unités n'est ni 0 ni 5, mais 7.



6 Égalité des produits en croix

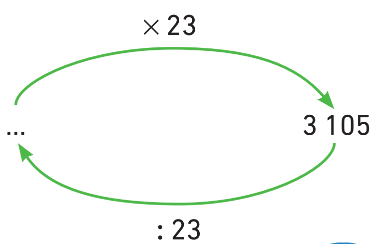
OBJECTIF 6

PROPRIÉTÉ Soit quatre nombres relatifs a, b, c et d (avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$).
Dire que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ signifie que $a \times d = c \times b$.



Exemples

- Les fractions $\frac{34}{51}$ et $\frac{2}{3}$ sont-elles égales ? Oui, car $34 \times 3 = 2 \times 51 = 102$.
- Compléter l'égalité $\frac{23}{15} = \frac{207}{?}$.
  Compléter cette égalité revient à compléter
  $23 \times ... = 207 \times 15 = 3\,105$, ce qui revient à compléter
  $23 \times ... = 3\,105$.
  Or, $\frac{3\,105}{23} = 135$, donc $\frac{23}{15} = \frac{207}{135}$.



cours

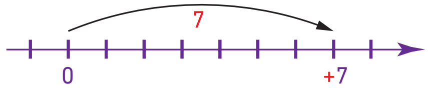
7 Nombres relatifs

OBJECTIF 7

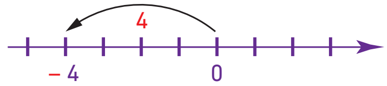
DÉFINITION Un **nombre relatif** est formé d'un signe + ou – et d'un nombre appelé **distance à zéro**.

Exemples

- (+7) est un nombre relatif :
  - son signe est **+** ;
  - sa distance à zéro est **7**.



- (–4) est un nombre relatif :
  - son signe est **–** ;
  - sa distance à zéro est **4**.



DÉFINITIONS Les nombres comportant un signe – sont appelés les **nombres négatifs**.
Les nombres comportant un signe + sont appelés les **nombres positifs**.

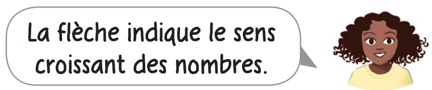
Remarque
Par convention, on **ne met pas de signe** devant le nombre 0.
0 est à la fois un nombre négatif et positif.

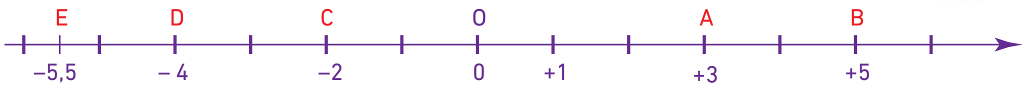
8 Repérer et comparer des nombres relatifs

OBJECTIF 8

DÉFINITION Sur une **droite graduée,** chaque point est repéré par un nombre relatif.
On dit que ce nombre est **l'abscisse** de ce point.

Exemples



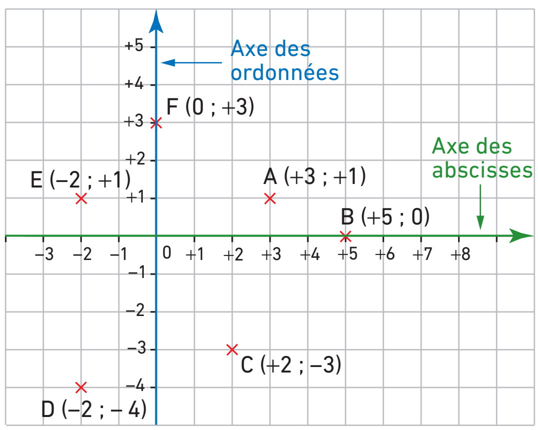


- L'abscisse de A est (+3). On note A (+3).
- De même, on note B (+5), C (–2), D (–4) et E (–5,5).

DÉFINITION Un **repère** orthogonal du plan est composé de deux droites graduées perpendiculaires et de même origine. L'une est appelée **axe des abscisses** et l'autre **axe des ordonnées**.

Exemple

- Dans un repère du plan, la position d'un point est donnée par un couple de nombres relatifs.
  +3 est **l'abscisse** du point A et +1 est **son ordonnée**.
  On dit que le point A a pour **coordonnées** (+3 ; +1) et on note A (+3 ; +1).



PROPRIÉTÉS

- De deux **nombres positifs**, le plus grand est celui qui a la plus grande distance à zéro.
- De deux **nombres de signes contraires**, le plus grand est le nombre positif.
- De deux **nombres négatifs**, le plus grand est celui qui a la plus petite distance à zéro.

Exemples

- $(+2) < (+4)$
- $(-12) < (+2)$
- $(-5) < (-3)$

9 Somme et différence de nombres relatifs

OBJECTIF 9

A Somme de deux nombres relatifs

PROPRIÉTÉ **Si** deux nombres relatifs sont de même signe, **alors** leur somme a ce même signe et a pour distance à zéro la somme des distances à zéro des deux nombres.

Exemples

- $(+7) + (+3) = (+10)$
- $(-8) + (-4) = (-12)$

PROPRIÉTÉ **Si** deux nombres relatifs sont de **signes contraires**, **alors** leur somme :
– a le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro ;
– a pour distance à zéro la différence des distances à zéro des deux nombres.

Exemples

- $(-3) + (+7) = (+4)$ car :
  $7 > 3$ donc la somme de $(+7)$ et (-3)
  a le signe de $(+7)$ et $7 - 3 = 4$.
- $(+2) + (-8) = (-6)$ car :
  $8 > 2$ donc la somme de $(+2)$ et (-8)
  a le signe de (-8) et $8 - 2 = 6$.

DÉFINITION Dire que deux nombres relatifs sont **opposés** signifie que leur somme est égale à zéro.

Deux nombres opposés ont la même distance à zéro, mais sont de signes contraires.

Exemple

- $(-7) + (+7) = 0$ donc (-7) et $(+7)$ sont opposés.

B Différence de deux nombres relatifs

PROPRIÉTÉ Soustraire un nombre, c'est **ajouter** son opposé.

Exemple

- $(+3) - (-8) = (+3) + (+8) = (+11)$ car l'opposé de (-8) est $(+8)$.

Soustraire (-8) revient donc à ajouter $(+8)$.

C Convention d'écriture

CONVENTION Dans une suite d'additions de nombres relatifs, on peut :
– supprimer les **signes d'addition** et les **parenthèses** autour des nombres ;
– supprimer le **signe « + »** devant un nombre s'il se trouve en début de ligne.

Exemple

- Soit l'expression $A = (+6) + (-7) + (-3{,}5) + (+9{,}2)$.

$A = (+6) + (-7) + (-3{,}5) + (+9{,}2)$ ← On supprime les signes d'addition et les parenthèses.
$A = +6 - 7 - 3{,}5 + 9{,}2$ ← On supprime le signe « + » en début de ligne.
$A = 6 - 7 - 3{,}5 + 9{,}2$ ← Les signes qui apparaissent dans l'expression finale sont donc les signes des nombres.

10 Opérations sur les nombres relatifs

OBJECTIF 10

A Rappels sur l'addition et la soustraction

PROPRIÉTÉ **Si** deux nombres relatifs sont de **même signe**, **alors** leur somme :
– a ce même signe ;
– a pour distance à zéro la somme des distances à zéro des deux nombres.

Exemples

- $(+13) + (+8) = +21$
- $(-12) + (-5) = -17$

PROPRIÉTÉ **Si** deux nombres relatifs sont de **signes contraires**, **alors** leur somme :
– a le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro ;
– a pour distance à zéro la différence des distances à zéro des deux nombres.

Exemples

- $(-7) + (+19) = +12$
- $(+5) + (-13) = -8$

PROPRIÉTÉ Soustraire un nombre, c'est ajouter son **opposé**.

Exemple

- $(+5) \underbrace{- (-9)} = (+5) \underbrace{+ (+9)} = +14$

B Multiplication

PROPRIÉTÉ **Si** deux nombres relatifs sont de **même signe**, **alors** leur produit :
– est **positif** ;
– a pour distance à zéro le produit des distances à zéro des deux nombres.

Exemples

- $(+5) \times (+7) = +35$
- $(-3) \times (-4) = +12$

PROPRIÉTÉ **Si** deux nombres relatifs sont de **signes contraires**, **alors** leur produit :
– est **négatif** ;
– a pour distance à zéro le produit des distances à zéro des deux nombres.

Exemples

- $(+6) \times (-2) = (-12)$
- $(-3) \times (+8) = (-24)$

PROPRIÉTÉ Dans un produit de plusieurs nombres relatifs différents de zéro :
– **Si** le nombre de facteurs négatifs est **pair**, **alors** le produit est positif ;
– **Si** le nombre de facteurs négatifs est **impair**, **alors** le produit est négatif.

Exemples

- $(-1) \times (-2) \times (+3) \times (-4) \times (-5) = +120$
  Il y a **quatre facteurs négatifs** dans ce produit, il est donc positif.
- $(-1) \times (+2) \times (-3) \times (-4) \times (+5) = -120$
  Il y a **trois facteurs négatifs** dans ce produit, il est donc négatif.

C Division

PROPRIÉTÉ **Si** deux nombres relatifs sont de **même signe**, **alors** leur quotient :
– est **positif** ;
– a pour distance à zéro le quotient des distances à zéro des deux nombres.

Exemples
- $\dfrac{+21}{+7} = +3$
- $\dfrac{-20}{-4} = +5$

PROPRIÉTÉ **Si** deux nombres relatifs sont de **signes contraires**, **alors** leur quotient :
– est **négatif** ;
– a pour distance à zéro le quotient des distances à zéro des deux nombres.

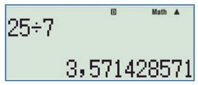
Exemples
- $\dfrac{+12}{-5} = -2{,}4$
- $\dfrac{-18}{+4} = -4{,}5$

D Valeurs approchées d'un quotient

DÉFINITIONS À un rang donné :
– la **troncature** d'un nombre est sa valeur approchée par défaut ;
– l'**arrondi** d'un nombre est, de sa valeur approchée par défaut ou par excès, celle qui est le plus proche du nombre.

Exemples

- En effectuant $\dfrac{25}{7}$ sur une calculatrice, elle affiche :



Rang	Encadrement par les valeurs approchées par défaut et par excès	Troncature	Arrondi
À l'unité	$3 < \dfrac{25}{7} < 4$	3	4
Au dixième	$3{,}5 < \dfrac{25}{7} < 3{,}6$	3,5	3,6
Au centième	$3{,}57 < \dfrac{25}{7} < 3{,}58$	3,57	3,57
Au millième	$3{,}571 < \dfrac{25}{7} < 3{,}572$	3,571	3,571

- $\dfrac{17}{8} = 2{,}125$. Par convention, l'arrondi au centième de $\dfrac{17}{8}$ est 2,13.

11 Enchainements d'opérations

OBJECTIF 11

PROPRIÉTÉ Pour **calculer une expression**, on effectue :
– les carrés, les cubes, etc.,
– les calculs entre parenthèses,
– les multiplications et les divisions,
– et enfin les additions et les soustractions.
Quand des opérations ont le même niveau de priorité, on les effectue de gauche à droite.

Exemples

- $A = 13 + 5 \times (3 - 11) - 7$
  $A = 13 + 5 \times (-8) - 7$
  $A = 13 + (-40) - 7$
  $A = -27 - 7$
  $A = -34$
- $B = 7 - 3 \times 4^2 + 11$
  $B = 7 - 3 \times 16 + 11$
  $B = 7 - 48 + 11$
  $B = -41 + 11$
  $B = -30$

12 Additionner et soustraire des nombres en écriture fractionnaire

OBJECTIF 12

PROPRIÉTÉ Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire ayant le même dénominateur :
– on additionne (ou soustrait) leurs numérateurs ;
– on garde leur dénominateur.

a, *b* et *c* étant trois nombres relatifs (avec $c \neq 0$) :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Exemples

- $\frac{-4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{-4+3}{5} = -\frac{1}{5}$
- $\frac{9}{7} - \left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{9-(-6)}{7} = \frac{9+6}{7} = \frac{15}{7}$

Exemple

- Pour calculer $\frac{2}{5} + \frac{7}{15}$, on remarque que 15 est un multiple de 5.

On peut mettre les deux fractions au dénominateur 15 :

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{15} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} + \frac{7}{15} = \frac{6}{15} + \frac{7}{15} = \frac{6+7}{15} = \frac{13}{15}$$

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire n'ayant pas le même dénominateur, on commence par les mettre au même dénominateur.

13 Additionner et soustraire des nombres en écriture fractionnaire dans le cas général

OBJECTIF 13

Exemples

- Pour calculer $\frac{3}{7} - \frac{1}{8}$, il faut écrire ces deux fractions avec le même dénominateur :

$$\frac{3}{7} - \frac{1}{8} = \frac{3 \times 8}{7 \times 8} - \frac{1 \times 7}{8 \times 7}$$
$$= \frac{24}{56} - \frac{7}{56} = \frac{24-7}{56} = \frac{17}{56}$$

Le produit des dénominateurs est toujours un dénominateur commun possible.

- Pour calculer $\frac{17}{9} + \frac{-5}{12}$, il faut écrire ces deux fractions avec le même dénominateur.

$$\frac{17}{9} + \frac{-5}{12} = \frac{17 \times 4}{9 \times 4} + \frac{-5 \times 3}{12 \times 3}$$
$$= \frac{68}{36} + \frac{-15}{36} = \frac{68+(-15)}{36}$$
$$= \frac{53}{36}$$

Dans cet exemple, on pourrait prendre comme dénominateur commun le résultat de 9×12, mais on préfère prendre un dénominateur plus petit en choisissant 36.

14 Multiplier et diviser des nombres en écriture fractionnaire

OBJECTIF 14

A Multiplication

PROPRIÉTÉ Pour multiplier deux nombres en écriture fractionnaire :
– on multiplie leurs numérateurs entre eux ;
– on multiplie leurs dénominateurs entre eux.
a, b, c et d étant quatre nombres relatifs (avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$) :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemple

- $\frac{5}{8} \times \frac{9}{4} = \frac{5 \times 9}{8 \times 4} = \frac{45}{32}$

B Inverse d'un nombre

DÉFINITION Dire que deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre signifie que leur produit est égal à 1.

Exemples

- $2 \times 0{,}5 = 1$. Les nombres 2 et 0,5 $\left(\text{ou } \frac{1}{2}\right)$ sont inverses l'un de l'autre.
- $7 \times \frac{1}{7} = 1$. Les nombres 7 et $\frac{1}{7}$ sont inverses l'un de l'autre.
- $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$. Les nombres $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$ sont inverses l'un de l'autre.

PROPRIÉTÉ a et b étant deux nombres relatifs non nuls, l'inverse de a est $\frac{1}{a}$ et l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Exemples

- L'inverse de 9 est $\frac{1}{9}$. En effet, $9 \times \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$.
- L'inverse de $\frac{1}{6}$ est 6. En effet, $\frac{1}{6} \times 6 = \frac{6}{6} = 1$.
- L'inverse de $\frac{7}{6}$ est $\frac{6}{7}$. En effet, $\frac{7}{6} \times \frac{6}{7} = \frac{42}{42} = 1$.

C Division

PROPRIÉTÉ Diviser par un nombre (non nul) revient à multiplier par son inverse.
a, b, c et d étant quatre nombres relatifs (avec b, c et d non nuls) :

$$\frac{a}{b} = a : b = a \times \frac{1}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemples

- $\frac{2}{5} : \frac{7}{9} = \frac{2}{5} \times \frac{9}{7} = \frac{2 \times 9}{5 \times 7} = \frac{18}{35}$
- $\frac{12}{17} : \frac{4}{11} = \frac{12}{17} \times \frac{11}{4} = \frac{12 \times 11}{17 \times 4} = \frac{3 \times 4 \times 11}{17 \times 4} = \frac{33}{17}$

15 Puissances entières d'un nombre relatif

OBJECTIF 15

A Puissances positives

a désigne un nombre relatif et n un entier positif non nul.

DÉFINITION a^n désigne le produit de n facteurs tous égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \dots \times a \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

CONVENTIONS
– Pour tout nombre a non nul, $a^0 = 1$.
– Pour tout nombre a, $a^1 = a$.

Vocabulaire
a^n se lit « a puissance n » ou « a exposant n ».

Exemples

- $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
- $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = +81$

Cas particuliers

- Si $n = 1$, $a^1 = a$. **Exemple** $5^1 = 5$
- Si $n = 2$, a^2 se lit « a au carré ». **Exemple** $5^2 = 5 \times 5 = 25$
- Si $n = 3$, a^3 se lit « a au cube ». **Exemple** $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$

B Puissances négatives

DÉFINITION a^{-n} désigne l'inverse de a^n.

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, où a est un nombre relatif différent de zéro.

Exemples

- $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{2 \times 2 \times 2} = \dfrac{1}{8}$
- $(-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{(-3) \times (-3)} = \dfrac{1}{9}$

Cas particulier : Si $n = 1$, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ est l'inverse de a.

16 Puissances de 10

OBJECTIF 16

n désigne un entier positif non nul.

A Calcul d'une puissance de 10

PROPRIÉTÉ 10^n désigne le produit de n facteurs tous égaux à 10 :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10 \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\,\underbrace{000 \dots 000}_{n \text{ zéros}}$$

PROPRIÉTÉ 10^{-n} désigne l'inverse de 10^n.

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}000 \dots 001}_{n \text{ zéros}}$$

Exemples

- $10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$
- $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001$

B Calculs avec les puissances de 10

PROPRIÉTÉ m et p désignent des entiers relatifs :

- $10^m \times 10^p = 10^{m+p}$
- $\dfrac{10^m}{10^p} = 10^{m-p}$
- $(10^m)^p = 10^{m \times p}$

Exemples

- $10^7 \times 10^4 = 10^{7+4} = 10^{11}$
- $10^5 \times 10^{-8} = 10^{5+(-8)} = 10^{-3}$
- $\dfrac{10^6}{10^2} = 10^{6-2} = 10^4$
- $\dfrac{10^5}{10^{-4}} = 10^{5-(-4)} = 10^9$
- $(10^4)^3 = 10^{4 \times 3} = 10^{12}$
- $(10^{-3})^2 = 10^{-3 \times 2} = 10^{-6}$

C Préfixes scientifiques

Les deux tableaux ci-dessous permettent d'indiquer, à l'aide des puissances de 10, par quel facteur est multipliée une unité pour obtenir des multiples ou sous-multiples de cette unité.

Préfixe	giga	méga	kilo	milli	micro	nano
Symbole	G	M	k	m	µ	n
Signification	10^9	10^6	10^3	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Exemples

- Un gigaoctet, noté Go, correspond à une quantité de données numériques de 10^9 octets, soit un milliard d'octets.
- Un microgramme, noté µg, correspond à une masse de 10^{-6} grammes, soit un millionième de gramme.

17 Notation scientifique d'un nombre

OBJECTIF 17

A Écriture d'un nombre en notation scientifique

DÉFINITION La **notation scientifique** d'un nombre décimal positif est la seule écriture de la forme $a \times 10^n$ dans laquelle le nombre a est compris entre 1 et 10 exclu ($1 \leqslant a < 10$) et n est un entier relatif.

Exemples

- La distance de la Terre au Soleil est d'environ 150 000 000 km, soit $1{,}5 \times 10^8$ km en notation scientifique.
- La taille du virus de la grippe est d'environ 0,000 000 09 m, soit 9×10^{-8} m en notation scientifique.

B Utilisations de la notation scientifique

La notation scientifique est utile pour donner un ordre de grandeur ou un encadrement du résultat d'un calcul et pour comparer des nombres.

Exemple

- Soit $A = 32\,657\,000$ et $B = 0{,}000\,486$.

Nombre	Notation scientifique	Encadrement	Ordre de grandeur
$A = 32\,657\,000$	$3{,}2657 \times 10^7$	$10^7 < A < 10^8$	$A \approx 3 \times 10^7$
$B = 0{,}000\,486$	$4{,}86 \times 10^{-4}$	$10^{-4} < B < 10^{-3}$	$B \approx 5 \times 10^{-3}$

Ordre de grandeur du produit $A \times B \approx 15 \times 10^4$.

18 Multiples, diviseurs et nombres premiers

OBJECTIF 18

A Multiples et diviseurs

DÉFINITION Un **entier naturel** est un nombre entier positif ou nul.

Exemple

- 0, 1, 2 et 3 sont des entiers naturels.

DÉFINITION Dire que l'entier naturel a est **multiple** de l'entier naturel b signifie qu'il existe un entier k tel que $a = b \times k$.
On dit aussi : « b est un **diviseur** de a » ou « a est **divisible par** b ».

Exemple

- $15 = 3 \times 5$ donc 15 est un multiple de 5.
  Autrement dit, 5 est un diviseur de 15.

Remarque
Tout nombre est multiple de 1. En effet, quel que soit le nombre entier naturel n, on a : $n \times 1 = n$, donc 1 est diviseur de tout nombre entier.

Exemple

- $12 \times 1 = 12$

Remarque
Tout nombre est multiple de lui-même, donc tout nombre est divisible par lui-même.

Exemple

- $27 = 27 \times 1$

B Nombres premiers

DÉFINITION Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement **deux diviseurs** distincts, 1 et lui-même.

Exemple

- Début de la liste des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31…
  Mais le nombre 1 n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur.

C Critères de divisibilité

Un nombre est **divisible par 2** s'il est pair, donc s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemple

- 276 est divisible par 2, mais 375 ne l'est pas.

Un nombre est **divisible par 5** s'il se termine par 0 ou 5.

Exemple

- 395 est divisible par 5, mais 921 ne l'est pas.

Un nombre est **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

Exemple

- 564 est divisible par 3, car $5 + 6 + 4 = 15$ qui est un multiple de 3.

Un nombre est **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemple

- 765 est divisible par 9, car $7 + 6 + 5 = 18$ qui est un multiple de 9.

D Diviseurs communs à deux nombres entiers

DÉFINITION Dire qu'un nombre d est un **diviseur commun** de deux nombres entiers a et b signifie que a et b sont divisibles par d.

Exemple

- 1, 2, 3 et 6 sont les diviseurs communs à 12 et 18.

DÉFINITION Dire que deux nombres entiers sont **premiers entre eux** signifie que leur seul diviseur commun est 1.

Exemple

- Les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6 et 12.
  Les diviseurs de 35 sont : 1, 5, 7 et 35.
  Le seul diviseur commun de 12 et 35 est 1.
  Donc 12 et 35 sont premiers entre eux.

19 Décomposition et fractions irréductibles

OBJECTIF 19

PROPRIÉTÉ On peut toujours décomposer un nombre non premier en produit de plusieurs facteurs premiers.

Exemple

- On peut décomposer 588 en produit de facteurs premiers :

$$588 = 2 \times 294$$
$$294 = 2 \times 147$$
$$147 = 3 \times 49$$
$$49 = 7 \times 7$$

Ainsi, $588 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7^2$

DÉFINITION Soit a et b deux entiers. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** lorsque a et b sont premiers entre eux.

Exemple

- $\frac{5}{7}$ est un fraction irréductible car 5 et 7 sont premiers entre eux.

Remarque

On peut **simplifier** facilement une fraction et la rendre **irréductible** en décomposant son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

Exemple

- On veut simplifier la fraction $\frac{120}{84}$.
  $120 = 2^3 \times 3 \times 5$
  $84 = 2^2 \times 3 \times 7$

$$\frac{120}{84} = \frac{2^3 \times 3 \times 5}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{7} = \frac{10}{7}$$

$\frac{10}{7}$ est une fraction irréductible.